УДК 519.644

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОГОГРАННИКОВ ГОССЕТА

Э.А. Шамсиев

Ташкентский государственный технический университет
E-mail: shamciev_tstu@mail.ru

Построены кубатурные формулы для шестимерного, семимерного и восьмимерного шара, инвариантные относительно групп преобразований многогранников Госсета. Числа узлов полученных формул минимальны или близки к ним.

Пусть G конечная подгруппа группы всех ортогональных преобразований $O(n)$ евклидова пространства R^n в себя. Характерным свойством ортогонального преобразования является сохранение длины векторов.

Область $\Omega\subset R^n$ и функция $\varphi(x)$, заданная в R^n, называются инвариантными относительно преобразований группы G, если $g(\Omega)=\Omega$ и $\varphi(gx)=\varphi(x)$ для любого $g\in G$. Совокупность точек вида ga, где a – фиксированная точка R^n, g пробегает все элементы группы G, называется орбитой или G-орбитой, содержащей точку, и обозначается $|G(a)|$. Количество точек орбиты зависит от точки a.

Формула

$$\int_\Omega p(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}) \qquad (1)$$

называется инвариантной кубатурной формулой относительно G, если область интегрирования Ω и весовая функция $p(x)$ инварианты относительно G, и совокупность узлов формулы (1) представляет собой объединение G-орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты.

Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, заданных в $\Omega\subset R^n$, и таких, что существуют интегралы

$$\int_\Omega p\,(x)\varphi_i(x)dx, \quad i=1,2,\ldots$$

Обозначим через ψ вещественное векторное пространство функций – линейную оболочку первых M функций последовательности. Предположим, что векторное пространство ψ инвариантно относительно группы G: для любой $\varphi\in\psi$ имеем $\varphi(gx)\in\psi$ при всех $g\in G$.

Имеет место следующее утверждение [1].

Теорема 1. Для того чтобы кубатурная формула (1), инвариантная относительно преобразований группы G, была точна для всех функций конечномерного векторного пространства Ψ, инвариантного относительно G, необходимо и достаточно; чтобы она была точна для тех функций из Ψ, которые инварианты относительно G.

Обычно в качестве группы G используются группы преобразований правильных многогранников (в R^2-группы преобразований правильных многоугольников). Это связано, во первых, тем обстоятельством, что упомянутые группы имеют, как правило, больший порядок по сравнению с группами одинаковой размерности, что уменьшает число инвариантных многочленов, относительно которых кубатурная формула должна быть точна. Во вторых, существенно упрощается выбор узлов, так как центры k-мерных граней ($k=0,1,2,...,n-1$) образуют G-орбиты. Аналогичными свойствами обладают точки, равноудаленные от вершин многогранника и лежащие на ребрах, биссектрисах двумерных граней и т. д.

Но в отдельных пространствах существуют группы, которые имеют больший порядок, чем соответствующие группы правильных многогранников. Эти группы оставляют неподвижными многогранники, не являющиеся правильными в класси-

ческом их понимании. Центры k-мерных граней ($k=0,1,2,\ldots,n-1$) таких многогранников не всегда образуют одну G-орбиту.

Гладкая кубическая поверхность трехмерного проективного пространства содержит 27 прямых, которые определяют многогранники 2_{21}, 3_{21}, 4_{21}-многогранники Госсета, инвариантные соответственно относительно групп E_6, E_7, E_8, порожденных отражениями [2, 3]. Ниже строятся кубатурные формулы, инвариантные относительно этих групп. Сначала докажем одно утверждение, позволяющее установить является ли рассматриваемое множество точек одной G-орбитой или оно объединение G-орбит.

Теорема 2. Пусть G – конечная подгруппа группы $O(n)$, порожденная отражениями, $m_1, m_2,\ldots,m_n$ – степени её базисных инвариантных форм и наименьшая из них равна двум. Если точка a отлична от начала координат, то для длины $G(a)$-орбиты справедлива оценка

$$|\,G(a)\,| \ge \frac{(n+l-2)!(n+2l-1)}{(n-1)!\,l!}, \qquad (2)$$

где $l=\left[\dfrac{m_2-1}{2}\right]$ – целая часть $\dfrac{m_2-1}{2}$, $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$.

Доказательство. Так как G есть ортогональная группа, то одной из базисных инвариантных форм является $r^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Не нарушая общности, можно предполагать, что числа $m_1,m_2,\ldots,m_n$ расположены в возрастающем порядке. Так как $\min\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}=2$, то $m_1=2$. На поверхности сферы $S_{n-1}=\{x\in R^n | x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1\}$ $r^2=1$ и кольцо инвариантных форм группы G в этом случае порождается остальными $n-1$ базисными инвариантными формами [4. С. 133].

Таким образом, если построить на S_{n-1} кубатурную формулу, инвариантную относительно группы G и точную для константы, то она согласно теореме 1 будет точно интегрировать все многочлены, степени которых меньше чем m_2. Допустим, что существует $G(a)$-орбита, для которой неравенство (2) не выполняется. Тогда спроектировав на поверхность сферы S_{n-1} точки этой орбиты и взяв их в качестве узлов, из условия требования точности для константы получаем следующую кубатурную формулу (m_2-1)-й степени точности:

$$\int\limits_{S_{n-1}} f(x)dS \cong \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})\,|\,G(a)\,|}\sum_{i=1}^{|G(a)|} f(a^{(i)}),$$

где $\Gamma(\lambda)=\int\limits_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-\lambda}dt=\int\limits_0^1 (\ln\frac{1}{t})^{\lambda-1}dt$ – гамма функция Эйлера.

Но с другой стороны, правая часть неравенства (2) даёт нижнюю границу для числа узлов кубатурной формулы, алгебраическая степень точности которой равна m_2-1 (Теорема 3.10 из [4. С. 85]). Таким образом, мы получили кубатурную формулу, содержащую меньшее число узлов по сравнению с нижней границей. Противоречие возникло из предположения, что существует $G(a)$-орбита, для которой неравенство (2) не выполняется. Теорема доказана.

Следствие. Если в условиях теоремы 2 группа G содержит преобразование центральной симметрии относительно начала координат, то для длины $G(a)$-орбиты справедлива оценка

$$|\,G(a)\,| \ge \frac{2(n-1+l)!}{(n-1)!\,l!},$$

где $l=\dfrac{m_2-2}{2}$.

Доказательство. Если группа G содержит преобразование центральной симметрии относительно начала координат, то все базисные инвариантные формы будут иметь четные степени, т. е. m_2-1 является нечетным числом. Правая сторона последнего неравенства есть нижняя граница для числа узлов кубатурной формулы на S_{n-1}, имеющей (m_2-1)-ю степень точности в случае, когда m_2-1 есть нечетное число (Теорема 9.2 из [4. С. 203]). Поэтому, предположение о существовании $G(a)$-орбиты, длина которой меньше чем $\dfrac{2(n-1+l)!}{(n-1)!\,l!}$, снова приводит к противоречию. Следствие доказано.

Известно [5], что группа E_6 порождена отражениями и базисные инвариантные формы имеют степени соответственно 2,5,6,8,9,12.

Координаты 27 вершин многогранника 2_{21} в пространстве R^6 зададим строками следующей матрицы [2]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_\lambda=\cos\dfrac{2\pi\lambda}{3}$, $s_\lambda=\sin\dfrac{2\pi\lambda}{3}$, $\lambda,\mu=1,2,3.$

Плоскости симметрии 2_{21} (их 36) определяются уравнениями [6]

$$x_2=0,\ x_4=0,\ x_6=0,\ \sqrt{3}x_1\pm x_2=0,\ \sqrt{3}x_3\pm x_4=0,$$
$$\sqrt{3}x_5\pm x_6=0,\ x_1+x_3+x_5=0,\ x_1\pm\sqrt{3}x_2-2x_3-2x_5=0,$$
$$x_1\pm\sqrt{3}x_2+x_3\pm\sqrt{3}x_4-2x_5=0,$$
$$x_1\pm\sqrt{3}x_2-2x_3+x_5\pm\sqrt{3}x_6=0,$$
$$x_1\pm\sqrt{3}x_2+x_3\pm\sqrt{3}x_4+x_5\pm\sqrt{3}x_6=0,$$
$$2x_1-x_3\pm\sqrt{3}x_4+2x_5=0,$$
$$2x_1-x_3\pm\sqrt{3}x_4-x_5\pm\sqrt{3}x_6=0,$$
$$2x_1+2x_3-x_5\pm\sqrt{3}x_6=0.$$

Через $a^{(i)}$ ($i=1,2,\ldots,27$) обозначим проекции на сферу $S_5=\{x\in R^6 | x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2=1\}$ вершин многогранника 2_{21}, а через $b^{(j)}$ ($j=1,2,\ldots,72$) – точки

$$(0,1,0,0,0,0),\ (0,0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,0,1),$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2},0,0,0,0\right),\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2},0,0\right),$$

$$\left(0,0,0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{2\sqrt{3}},\pm\frac{1}{2}\right)$$

и центрально-симметричные с ними точки.

Согласно теореме 2, для длины $E_6(a)$-орбиты справедлива оценка $|E_6(a)|\geq 27$, поэтому точки $a^{(i)}$ образуют одну E_6-орбиту.

Отметим также, что $b^{(j)}$ являются проекциями на S_5-центров пятимерных граней – правильных симплексов. Проекциями на S_5 центров других пятимерных граней – специальных десятивершинников являются точки – $a^{(i)}$.

Существуют различные способы записи базисных инвариантных форм группы E_6 [7]. Для наших целей достаточно знать, что

$$P_2(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2;$$

$$P_6(x)=\sum q_\lambda^2-10\sum q_\lambda q_\mu+\sum p_\lambda^2 p_\mu-3p_1p_2p_3,$$

где индексы λ, μ различны в каждом члене соответствующей суммы.

$$\begin{cases} p_1=x_1^2+x_2^2,\ p_2=x_3^2+x_4^2,\ p_3=x_5^2+x_6^2 \\ q_1=\frac{1}{3}x_1^3-x_1x_2^2,\ q_2=\frac{1}{3}x_3^3-x_3x_4^2,\ q_3=\frac{1}{3}x_5^3-x_5x_6^2. \end{cases}$$

Нам потребуются значения многочленов $P_2(x)$ и $P_6(x)$ в точках $a^{(i)}$ и $b^{(j)}$. Прямым подсчетом, убеждаемся, что

$$P_2(a^{(i)})=P_2(b^{(j)})=1,\ P_6(a^{(i)})=\frac{5}{36},\ P_6(b^{(j)})=0.$$

Переходим к построению кубатурных формул для шара $B_6=\{x\in R^6|x_1^2+...+x_6^2\leq 1|\}$, инвариантных относительно E_6.

Группа E_6 имеет три линейно-независимых инвариантных многочлена до 4-й степени включительно:

$$1,\ P_2(x),\ P_2^2(x). \qquad (3)$$

Кубатурную формулу 4-й степени точности, инвариантную относительно группы E_6 будем строить в виде

$$\int_{B_6} f(x)dx\cong A_0 f(\theta)+A\sum_{i=1}^{27} f(\lambda a^{(i)}), \qquad (4)$$

где θ=(0,0,0,0,0,0).

Требуя, чтобы кубатурная формула (4) была точна для многочленов (3), получаем следующую систему

$$\begin{cases} A_0+27A=\frac{\pi^3}{6} \\ 27\lambda^2 A=\frac{\pi^3}{8} \\ 27\lambda^4 A=\frac{\pi^3}{10}, \end{cases}$$

решением которой является

$$A_0=\frac{\pi^3}{96},\ A=\frac{5\pi^3}{864},\ \lambda^2=\frac{4}{5}.$$

Дополним группу E_6 преобразованием центральной симметрии относительно начала координат. Полученную группу обозначим через E_6^*. Следующая кубатурная формула 5-й степени точности инвариантна относительно группы E_6^*:

$$\int_{B_6} f(x)dx\cong\frac{\pi^3}{96}f(\theta)+$$

$$+\frac{5\pi^3}{1728}\sum_{i=1}^{27}\left[f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}a^{(i)}\right)+f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}a^{(i)}\right)\right]. \qquad (5)$$

Число узлов кубатурной формулы (4) совпадает с нижней границей для числа узлов [4. С. 81], а число узлов кубатурной формулы (5) на 12 единиц превышают соответствующую нижнюю границу [4. С. 196].

Линейно-независимыми многочленами до 7-й степени, инвариантными относительно E_6^* являются многочлены (3) и $P_2^3(x)$, $P_6(x)$. Кубатурную формулу 7-й степени точности будем искать в виде

$$\int_{B_6} f(x)dx\cong A_0 f(\theta)+$$

$$+A\sum_{i=1}^{27}[f(\lambda a^{(i)})+f(-\lambda a^{(i)})]+B\sum_{j=1}^{72}[f(\mu b^{(j)})]. \qquad (6)$$

Требуя, чтобы кубатурная формула (6) была точна для линейно-независимых инвариантных многочленов до 7-й степени включительно, приходим к следующей системе:

$$
\begin{cases}
A_0 + 54A + 72B = \dfrac{\pi^3}{6} \\
54\lambda^2 A + 72\,\mu^2 B = \dfrac{\pi^3}{8} \\
54\lambda^4 A + 72\mu^4 B = \dfrac{\pi^3}{10} \\
54\lambda^6 A + 72\mu^6 B = \dfrac{\pi^3}{12} \\
54 \cdot \dfrac{5}{36} \cdot \lambda^6 A = \dfrac{\pi^3}{216}.
\end{cases}
$$

Решая систему, получаем

$$A_0 = \frac{3493 \mp 3150}{240(6 \pm 1)^3}\pi^3,\; A = \frac{(5 \pm 2)^3 \pi^3}{480\,(6 \pm 1)^3},$$

$$B = \frac{343\pi^3}{1440\,(6 \pm 1)^3}, \lambda^2 = \frac{2(6 \pm 1)}{3(5 \pm 2)},\; \mu^2 = \frac{6 \pm 1}{7}.$$

Здесь верхние знаки параметров дают одну кубатурную формулу, нижние – другую.

Число узлов кубатурной формулы (6) всего на две единицы превышает соответствующую нижнюю границу для числа узлов.

Известно [8], что вершины многогранника 3_{21} можно расположить в точках (±1,0,±1,±1,0,0,0) и в точках, получаемых из них циклическими перестановками координат. В этом случае центр симметрии многогранника 3_{21} совпадает с началом координат, а 63 его плоскости симметрии определяются уравнениями $x_i=0$ (i=1,2,...,7) $x_i \pm x_j \pm x_k \pm x_l = 0$, где индексы i, j, k, l принимают значения следующих четверок чисел: 1,2,3,5; 1,2,4,7; 1,3,6,7; 1,4,5,6; 2,3,4,6; 2,5,6,7; 3,4,5,7 [9]. Группа E_7 преобразований многогранника 3_{21} порождена отражениями и базисные инвариантные формы имеют степени соответственно 2,6,8,10,12,14,18. В работе [6] определен явный вид базисных инвариантных форм. Для наших целей ограничимся тем, что две первые базисные инвариантные формы имеют вид

$$I_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_7^2,\; I_6(x) =$$
$$= \sum x_i^6 + 5\sum x_i^4 x_j^2 + 30\sum x_i^2 x_j^2 x_k^2,$$

где i, j=1, 2,...,7 различны в любом члене соответствующей суммы, а i, j, k принимают значения следующих троек чисел 1,3,4; 2,4,5; 3,5,6; 4,6,7; 5,7,1; 6,1,2; 7,2,3.

Очевидно, что точки $c^{(i)}$ (i=1,2,...,56):

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0,0\right), \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0\right),$$

$$\left(0,0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(0,0,0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0,0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0,0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0,0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

образуют E_7-орбиту, так как они являются проекциями на S_6 вершин многогранника 3_{21} и для длины $E_7(a)$-орбиты справедлива оценка $|E_7(a)| \geq 56$ (следствие теоремы 2).

Точки $d^{(j)}$ (j=1,2,...,126):

$$(\pm 1,0,0,0,0,0,0),\ (0, \pm 1,0,0,0,0,0),\ (0,0, \pm 1, 0, 0,0,0),$$
$$(0,0,0, \pm 1,0,0,00,\ (0,0,0,0, \pm 1,0,0),$$
$$(0,0,0,0,0, \pm 1,0),\ (0,0,0,0,0,0, \pm 1),$$
$$(\pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}, 0, 0), (\pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}, 0, 0, \pm\tfrac{1}{2}),$$
$$(\pm\tfrac{1}{2}, 0, 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, 0), (\pm\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}, 0, 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}),$$
$$(0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}, 0), (0, \pm\tfrac{1}{2}, 0, 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}),$$
$$(0, 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2})$$

имеющие с точностью до постоянного множителя одинаковые координаты с плоскостями симметрии, также образуют одну E_7-орбиту (это будет показано немного позже).

Нам потребуются значения базисных инвариантных форм в точках $c^{(i)}$ и $d^{(j)}$. Прямым подсчетом находим, что

$$I_2(c^{(i)}) = I_2(d^{(j)}) = I_6(d^{(j)}) = 1,\; I_6(c^{(i)}) = \frac{7}{3}.$$

Нетрудно также убедится, что

$$J(1) = \frac{16}{105}\pi^3,\; J(I_2) = \frac{16}{135}\pi^3,\; J(1_2^{\,2}) = \frac{16}{165}\pi^3,$$
$$J(1_2^{\,3}) = \frac{16}{195}\pi^3,\; J(I_6) = \frac{16}{143}\pi^3,$$

где

$$J(f) = \int_{B_7} f(x)dx, B_7 = \{x \in R^7 \,|\, x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_7^{\,2} \leq 1\},$$
$$dx = dx_1 \cdot dx_2 \cdot ... \cdot dx_7$$

Выпишем все линейно независимые многочлены до 5-й степени, инвариантные относительно группы E_7:

$$1, I_2(x),\; I_2^{\,2}(x). \qquad (7)$$

Кубатурную формулу 5-й степени точности, инвариантную относительно E_7, будем строить в виде

$$\int_{B_7} f(x)dx \cong A_o\, f(0,...,0) + A\sum_{i=1}^{56} f(\lambda c^{(i)}). \qquad (8)$$

Требование точности кубатурной формулы (8) для инвариантных многочленов (7) приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{cases}
A_o \quad +56A = \dfrac{16}{105}\pi^3 \\
56\lambda^2 A = \dfrac{16}{135}\pi^3 \\
56\lambda^4 A = \dfrac{16}{165}\pi^3,
\end{cases}
$$

решением которой является

$$A_o = \frac{64}{8505}\pi^3,\; A = \frac{22}{8505}\pi^3,\; \lambda^2 = \frac{9}{11}.$$

Число N=57 узлов кубатурной формулы (8) совпадает с нижней границей для числа узлов.

Переходим к построению кубатурной формулы 7-й степени. Инвариантными относительно E_7 являются многочлены (7) и $I_2^3(x)$, $I_6(x)$.

Кубатурную формулу 7-й степени точности, инвариантную относительно группы E_7, будем искать в виде

$$J(f)=\int_{B_7} f(x)dx \cong A_o f(0,...,0)+$$

$$+A\sum_{i=1}^{56} f(\lambda c^{(i)})+B\sum_{j=1}^{126} f(\mu\ d^{(j)}). \qquad (9)$$

Требуя что кубатурная формула (9) была точна для всех линейно независимых инвариантных многочленов до 7-й степени включительно, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_0\ +56A+126B=\dfrac{16}{105}\pi^3 \\ 56\lambda^2 A+126\mu^2 B=\dfrac{16}{135}\pi^3 \\ 56\lambda^4 A+126\mu^4 B=\dfrac{16}{165}\pi^3 \\ 56\lambda^6 A+126\mu^6 B=\dfrac{16}{195}\pi^3 \\ 56\cdot\dfrac{7}{3}\lambda^6 A+126\mu^6 B=\dfrac{16}{143}\pi^3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$A_o=\frac{2^7\cdot 13(249301\pm 45\sqrt{78})}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11(78\pm\sqrt{78})^3}\pi^3,$$

$$A=\frac{2\cdot 13^2(22\pm\sqrt{78})^3}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11(78\pm\sqrt{78})^3}\pi^3,$$

$$B=\frac{2^6\cdot 7^2\cdot 13^2}{3^3\cdot 5\cdot 11(78\pm\sqrt{78})^3}\pi^3,$$

$$\lambda^2=\frac{3(78\pm\sqrt{78})}{13(22\pm\sqrt{78})},\quad \mu^2=\frac{78\pm\sqrt{78}}{91}.$$

Верхние знаки параметров дают одну кубатурную формулу, нижние – другую. Число N=183 узлов кубатурной формулы (8) также совпадает с нижней границей для числа узлов.

Перейдем теперь к доказательству утверждения, что точки $d^{(j)}$ образуют одну E_7-орбиту. Предположим обратное, т. е. что множество $\{d^{(j)}\}_{j=1}^{126}$ является объединением двух E_7-орбит, длины которых равны N_1 и N_2 (N_1, $N_2\geq 56$, $N_1+N_2=126$). Не нарушая общности, можно предположить, что первые N_1 точек из рассматриваемого множества принадлежат одной орбите, остальные – другой орбите. На поверхности сферы S_6 линейно независимыми многочленами до 7-й степени являются константа и $I_6(x)$.

Кубатурную формулу ищем в виде

$$\int_{S_6} f(x)ds \cong A\sum_{i=1}^{56} f(c^{(i)})+B\sum_{j=1}^{N_1} f(d^{(j)}),$$

где коэффициенты A и B определяются из системы

$$\begin{cases} 56A+N_1B=\dfrac{16}{15}\pi^3 \\ 56\dfrac{7}{3}A+N_1B=\dfrac{16}{11}\pi^3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что последняя система разрешима, и мы получаем кубатурную формулу с N_1+56<168 узлами, что и приводит к противоречию, так как число 168 является нижней границей для числа узлов кубатурной формулы 7-й степени точности. Противоречие возникло из предположения, что множество $\{d^{(j)}\}_{j=1}^{126}$ является объединением E_7-орбит. Следовательно, это множество является E_7-орбитой. Аналогичным образом можно показать, что множество точек $\{d^{(j)}\}_{j=1}^{72}$ из пункта 2 образуют одну E_6-орбиту.

3. Плоскости симметрии многогранника 4_{21} описывается уравнениями

$$x_i\pm x_j=0\,(i,j=1,2,...,8;\,i<j)$$

$$\text{и}\ x_1\pm x_2\pm x_3\pm x_4\pm x_5\pm x_6\pm x_7\pm x_8=0,$$

где количество плюсов четно [7].

Базисные инвариантные формы группы E_8 имеют степени соответственно 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30 [7]. Очевидно, что инвариантный многочлен степени 2 есть $I_2(x)=x_1^2+x_2^2+...+x_8^2$.

Согласно следствию теоремы 2 для произвольной точки a, отличной от начала координат, справедлива оценка $|E_8(a)|\geq 240$, откуда следует что точки

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,0,0,0,0\right),...,\left(0,0,0,0,0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

и точки

$$\begin{pmatrix}\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \\ \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

где количество плюсов четно, образуют одну E_8-орбиту (группа E_8 содержит преобразование центральной симметрии, поэтому точки центрально-симметричны).

Обозначим эти точки через $e^{(i)}$ (i=1,2,...,240). На основании требования точности для константы и $I_2(x)$, $I_2^2(x)$, $I_2^3(x)$ несложно получить следующую кубатурную формулу 7-й степени точности:

$$\int_{B_8} f(x)dx \cong \frac{311\pi^4}{8640}f(\theta)-$$

$$-\frac{17\pi}{240}\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_8^2}\right)+$$

$$+\frac{49\pi^4}{8640}\sum_{i=1}^{240} f\left(\sqrt{\frac{6}{7}}e^{(i)}\right),$$

где $\theta=(0,0,0,0,0,0,0,0)$,

$$B_8=\{x\in R^8\,|\,x_1^2+...+x_8^2\leq 1\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3. – № 5. – С. 769–791.
2. Coxeter H.S.M. The polytope 2_{21}, whose twenty seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface // Amer. J. Math. – 1940. – V. 62. – № 3. – P. 457–486.
3. Todd J.A. Polytopes associated with the general cubic surface // J. London Math. Soc. – 1932. – V. 7. – № 27. – P. 200–205.
4. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
5. Coxeter H.S.M. The product of the generators of a finite group generated by reflections // Duke Math.J. – 1951. – V. 18. – P. 765–782.
6. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // В сб.: Проблемы геометрии. – Т. 11 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР). – М.: 1980. – С. 203–240.
7. Игнатенко В.Ф. Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями // Матем. сборник. – 1983. – Т. 120. – № 4. – С. 556–568.
8. Frame J.S. The classes and representations, of the groups of 27 lines and 28 bitangents // Annali di matematika. – 1951. – V. 32. – P. 83–119.
9. Игнатенько В.Ф. Алгебраические поверхности с группой симметрии многогранника 3_{21} // Украинский геометрический сборник. – 1980. – Вып. 23. – С. 50–56.

УДК 519.865